**Abbildungen** $|B|^{|A|}$ Abbildungen $A \to B$; **injektiv**: $a \neq a' \in A: f(a) \neq f(a') \Leftrightarrow f(a)=f(a') \Rightarrow a = a'$

$\#$ inj. Abb: $\frac{b!}{(b-a)!}$ **surjektiv**: $\forall b \in B\ \exists a \in A: f(a)=b$ $\# b^{a}\ \frac{a!}{(a-b)!}\ b^{a-b}$

---

**Kombinatorik**: Grundregeln: $S = S_1 \dot\cup S_2 \Rightarrow |S| = |S_1| + |S_2|$ $S = S_1 \times S_2 \Rightarrow |S| = |S_1||S_2|$

$f: S_1 \to S_2$ bij $\Rightarrow |S_1| = |S_2|$ Multinomialkoeff $\binom{n}{k_1 \ldots k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$ $(\sum k_i = n)$

| | Permut. | Kombin (ohne RF) | Variat (m. RF) |
|---|---|---|---|
| ohne Wdh | $n!$ | $\binom{n}{k}$ | $k!\binom{n}{k}$ Lotto m. RF |
| mit Wdh | $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ MISSISSIPPI Anagr. | $\binom{n+k-1}{k-1}$ Lotto m zurücklg | $n^k$ |

Bin Satz $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

allg $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

---

**In+Exklusion** $|A \cup B \cup C| = |A \cap B \cap C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A| + |B| + |C|$

---

**W'** $\Omega = \{\text{Elementarereignisse}\}$; $\Sigma \subseteq 2^{\Omega}$ (Potenzmg) $= \{\text{Ereignisse}\}$ $A \in \Sigma\ (A \subseteq \Omega): p(A) =$ W' von A

Axiome: $\forall A \in \Sigma: p(A) \geq 0$; $p(\Omega) = 1$; $\forall A_1, A_2 \in \Sigma: (A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2))$

Folg: $A \subseteq B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$; $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$; A, B unab $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A)\,p(B)$

Gleichvert: $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$; bedingte W' $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$; $p(A \cap B) = p(A \setminus \overline{B})$

---

**Graphen** irreflexiv: $\forall v \in V: \neg(vRv) \wedge$ symmetrisch $\Rightarrow$ Graph

Teilgraph $G'$ von $G$: $V' \subseteq V \wedge E' \subseteq E$, induziert, wenn $E' = \binom{V'}{2} \cap E$ (Alle Kanten, die Knoten in E' verbinden sind auch in E')

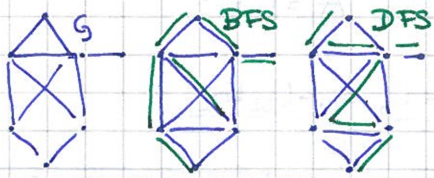
zshgd: je 2 Knoten sind durch Weg verbunden, Zshgskompon. = Äklassen d. Verbundenheit

**Adjazenzmatrix**: $\#$ Spaziergänge der Länge k: $(A_G^k)_{vw}$ von v nach w $A_G$ = Adj. Matrix zu G

**Valenzsequenz** Handshake $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$; Erdös-Gallai $\forall i = 1,\ldots,n$ $\sum_{j=1}^{i} d_j \leq i(i-1) + \sum_{j=i+1}^{n} \min\{i, d_j\}$

Verfahren von Havel-Hakimi $d = (\ldots)$ Schritt 1 $d' = (\ldots)$

**Breiten+Tiefensuche**




**Eulertour** geschlossener Spaziergang, der jede Kante genau 1x besucht

G eulersch $\Leftrightarrow$ G hat Eulertour

$\Leftrightarrow$ " zshgd $\forall v \in V: \deg(v)$ ist gerade

$\Leftrightarrow$ G zshgd $\wedge$ E ist kantendisjunkte $\cup$ von Kreisen

---

**2-Zshg**: $G = (V, E)$ heißt k-zshgd $(k \geq 2)$ falls $|V| \geq k+1$ und beim Löschen von k-1 Knoten bleibt G zshgd.

G ist 2-zshg $\Leftrightarrow$ je 2 Knoten liegen auf gemeinsamen Kreis

$\Leftrightarrow$ G hat Ohrenzerlegung $(C_0, P_1, P_2, P\ldots)$ ($C_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$)

---

**Operationen auf Multigraphen** Einfügen von Kante: $G+e' := (V, E \dot\cup \{e'\})$; Entf. $G \setminus e := (V, E \setminus \{e\})$

Entfernen eines Knotens $G \setminus v := (V \setminus \{v\}, \{e \in E \mid v \notin e\})$

Unterteilen von Kante $e = (v, w)$: $G\,\%\,e := (V \dot\cup \{u\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{(v,u), (u,w)\})$

Kontraktion einer Kante $e = (v, w)$ $G/e := ((V \dot\cup \{u\}) \setminus \{v, w\}, \{e' \in E \mid e' \cap \{v,w\} = \emptyset\}$
$\cup \{(u,x) \mid (v,x) \in E\} \cup \{(y,u) \mid (y,w) \in E\})$

---

**Bäume** kreisfrei + zshgd

G ist Baum $\Leftrightarrow$ kreisfrei $\wedge |E| = |V| - 1$

$\Leftrightarrow$ zshgd $\wedge |E| = |V| - 1$

$\Leftrightarrow \forall v, w \in V: \exists!$ v,w-Weg in G

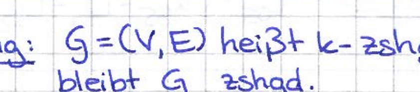
$\Leftrightarrow$ G kreisfrei $\wedge \forall e \notin E$: G+e hat Kreis

$\Leftrightarrow$ G zshgd $\wedge \forall e \in E$: $G \setminus e$ uzshgd.

Blatt $\deg(v) = 1$ Ein Baum mit mindestens 2 Knoten hat mind. 2 Blätter

Bäume sind isomorph, wenn sie gleichen Code haben

① Bestimme Zentrum ② Erstelle Codes f. Unterbäume d. Zentr. knoten, lex sortiert ③ Zentr. mit kleinerem Code ist Wurzel



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ((())()) | ()(())) | (((()))) | gepfl. | wohlgeklammert |
| ((())()) | ((())()) | (((()))) | Wurzel | lexikograph. sort. |
| ((())()) | ((())()) | ((())()) | Baum | bestimme Zentrum |

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

$C_n$ = Kreis mit n Knoten

$K_n$ = Vollst. Graph mit n Knoten

**Minimale aufspannende Bäume** Kreiskriterium: Jedes $e \in E \setminus T$ hat in $C(T, e)$ max Gewicht
Schnitt: Jedes $e \in T$ hat in $D(T, e)$ minimales Gewicht
Cayley: # knotengelabelter aufspannender Bäume des $K_n$ ist $n^{n-2}$

---

**Bipartites Matching** bipartiter Graph: $G = (\overbrace{U \dot\cup V}^{\text{zweigefärbt}}, E)$ $\forall \{u, u'\} \in U : \{u, u'\} \notin E$ (Vanal.)
Matching: Menge von paarweise nicht adjazenten Kanten. max: größte # an Knoten
perfekt: max + alle Knoten werden getroffen. M augment. Weg $u \cdot \longrightarrow \longrightarrow \cdot v$
Knotenüberdeckung: alle Kanten überdeckende Knotenmenge
M maximal $\Leftrightarrow \nexists$ M-augm. Weg. König: $\max\{|M| \mid M \text{ ist Match}\} = \min\{|C| \mid C \text{ ist KÜ}\}$
**Heiratssatz** (Frobenius) $G$ hat perf $M \Leftrightarrow |U| = |V| \wedge \forall H \subseteq U : |N(H)| \geq |H|$ N=Nachb.

---

**Stabile Hochzeit** Men-Propose-Women-Dispose (männeroptimal)
① bestmöglicher Antrag an Frau ② Frau nimmt an, falls nicht verlobt $\vee$ neuer gefällt ihr besser. Sonst lehnt sie ab.

---

**Abschätzungen** $f = O(g) \Leftrightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \exists C \in \mathbb{R}\ \forall n \geq n_1 : |f(n)| \leq C \cdot g(n)$

---

**LGS** Gauss: unter einer $\neq 0$ 0en erzeugen; G-Jordan: unter und über

---

**Cholesy** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, pos semi definit: $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: x^T A x \geq 0$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} e_{kj}^2} \qquad L_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{kj} L_{ij}}{e_{kk}}$$

~~kontext~~: pos def: kleinster EW $\lambda_n > 0$

$A = LL^T$

$$L_{11} = \sqrt{a_{11}},\ L_{21} = \frac{a_{21}}{L_{11}},\ L_{31} = \frac{a_{31}}{L_{11}},\ L_{41} = \frac{a_{41}}{L_{11}}$$
$$L_{22} = \sqrt{a_{22} - L_{21}^2},\ L_{32} = \frac{a_{32} - L_{21}L_{31}}{L_{22}},\ L_{42} = \frac{a_{42} - L_{21}L_{41}}{L_{22}}$$
$$L_{33} = \sqrt{a_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2},\ L_{43} = \frac{a_{43} - L_{31}L_{41} - L_{32}L_{42}}{L_{33}},\ L_{53} = \frac{a_{53} - L_{31}L_{51} - L_{32}L_{52}}{L_{33}}$$
$$L_{44} = \sqrt{a_{44} - L_{41}^2 - L_{42}^2 - L_{43}^2},\ L_{54} = \frac{a_{54} - L_{41}L_{51} - L_{42}L_{52} - L_{43}L_{53}}{L_{44}} \qquad L_{55} = \sqrt{a_{55} - L_{51}^2 - L_{52}^2 - L_{53}^2 - L_{54}^2}$$

---

**Normen und Konditionszahlen** $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ Norm, wenn
(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Spaltensummennorm: $\|A\|_1 = \max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Zeilensummennorm: $\|A\|_\infty = \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

**Fehler** exakter Wert: $x$, Näherungswert $x + \Delta x$ abs. Fehler $\|(x + \Delta x) - x\| = \|\Delta x\| = \text{abs}(x)$
relativer F $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \text{rel}(x)$
Kondition: $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

---

Lineares Programm in Stdform $\max c^T x$ so dass $Ax = b$ $x \geq 0$ mit $b \geq 0$
Umformung:
$\min c^T x \rightsquigarrow \max (-c)^T x$
$b_i < 0 \rightsquigarrow$ multipl. Zeile i mit $(-1)$
$a^T x \leq b_i \rightsquigarrow a^T x + s_i = b_i \quad s_i \geq 0$ ($s_i$ Schlupfvar)
$a^T x \geq b_i \rightsquigarrow a^T x - s_i = b_i,\ s_i \geq 0$ "
beliebiges $x_i$ (ohne $x_i \geq 0$) $\rightsquigarrow x_i = x_i^+ - x_i^-,\ x_i^+, x_i^- \geq 0$

~~min $c^T x$~~ $\min -x_1 - x_2$
~~s.d. $Ax$~~ s.d. $x_1 - x_2 \geq 3$
$2x_1 + x_2 \leq 8$
$x_2 \geq 0$

$$\begin{aligned}
\max\ & x_1^+ - x_1^- + x_1 \\
\text{s.d.}\ & x_1^+ - x_1^- - x_2 - s_1 = 3 \\
& 2x_1^+ - 2x_1^- + x_2 + s_2 = 8 \\
& x_1^+, x_1^-, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}$$

---

Zahlendarstellungen
$12\frac{1}{15} : 5 = 2$ Rest $2\frac{1}{15}$
$2\frac{1}{15} : 1 = 2$ Rest $1/15$
$1/15 : 1/5 = 0$ Rest $\boxed{1/15}$
$1/15 : 1/25 = 1$ Rest $2/75$
$2/75 : 1/125 = 3$ Rest $1/375$ $(= \frac{1}{25} \cdot \boxed{\frac{1}{15}})$

$12\frac{1}{15} = 22.0\overline{13}_{(5)}$